

## 熱方程式の解を形式的に求める

次の熱方程式 (HE), (GHE)

$$(HE) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t) & ((x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty)) \\ u(x, 0) = u_0(x) & (x \in \mathbf{R}^n) \end{cases}$$

$$(GHE) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, t) & ((x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty)) \\ u(x, 0) = u_0(x) & (x \in \mathbf{R}^n) \end{cases}$$

について考える.

Fourier 変換  $\mathcal{F}$ , 逆 Fourier 変換  $\mathcal{F}^{-1}$  を

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} u(x) e^{-ix \cdot \xi} dx, (\mathcal{F}^{-1}u)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} u(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$$

とする. このとき, 合成積  $u * v$  に対して  $\mathcal{F}(u * v) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\mathcal{F}u)(\mathcal{F}v)$ ,  $\mathcal{F}^{-1}(uv) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\mathcal{F}^{-1}u) * (\mathcal{F}^{-1}v)$  が成り立つ. また, 微分に関して  $\frac{\partial}{\partial \xi_j} \mathcal{F}u = -i\xi_j \mathcal{F}u$  が成り立つ.

また,  $n$  次元の熱核 (Gauss-Weierstrass 核)  $G_n(x, t)$  を  $G_n(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$  ( $(x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty)$ ) と定義する.

(GHE) の 2 つの等式を Fourier 変換することで,  $t$  に関する次の常微分方程式 (FGHE)

$$(FGHE) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{F}u)(\xi, t) = -|\xi|^2 (\mathcal{F}u)(\xi, t) + (\mathcal{F}f)(\xi, t) & ((\xi, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty)) \\ (\mathcal{F}u)(\xi, 0) = (\mathcal{F}u_0)(\xi) & (\xi \in \mathbf{R}^n) \end{cases}$$

が得られる. これを解くと

$$(\mathcal{F}u)(\xi, t) = (\mathcal{F}u_0)(\xi) e^{-|\xi|^2 t} + \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} (\mathcal{F}f)(\xi, s) ds$$

となる. よって, 両辺逆 Fourier 変換を施すと

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (u_0 * (\mathcal{F}^{-1} e^{-|\cdot|^2 t}))(x, t) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^t ((\mathcal{F}^{-1} e^{-(t-s)|\cdot|^2}) * f(\cdot, s))(x, s) ds \\ &= (G_n * u_0)(x, t) + \int_0^t (G_n(\cdot, t-s) * f(\cdot, s))(x, s) ds \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} f(y, s) (4\pi(t-s))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} dy ds \end{aligned}$$

となる. よって, (GHE) の解が形式的に得られた.  $f = 0$  とすると, (HE) の解も得られる. ■